

Пример 1

Расчет разветвленной цепи постоянного тока. Расчет производится тремя методами: методом последовательного применения законов Кирхгофа, методом контурных токов и методом узловых потенциалов.

По результатам расчета составляется баланс мощностей, строится потенциальная диаграмма.

Дано:

$$R1 = 2\text{Ом};$$

$$R2 = 2\text{Ом};$$

$$R3 = 6\text{Ом};$$

$$R4 = 4\text{Ом};$$

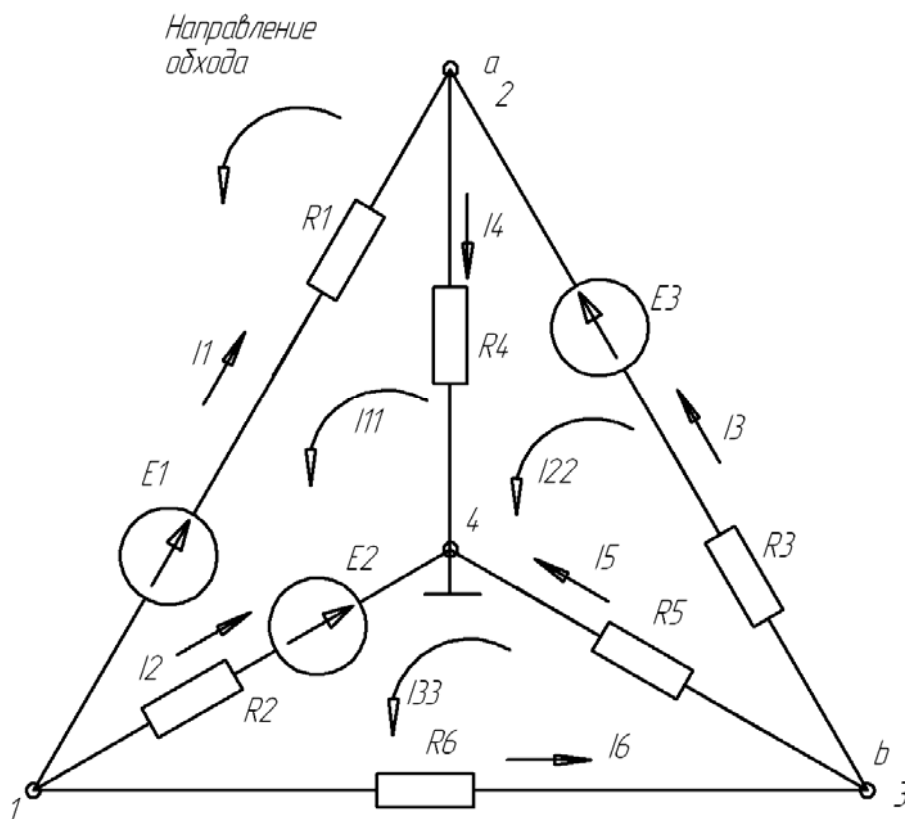
$$R5 = 4\text{Ом};$$

$$R6 = 8\text{Ом};$$

$$E1 = 12\text{В};$$

$$E2 = 25\text{В};$$

$$E3 = 30\text{В}$$



Решение:

1. Определение токов в цепи непосредственным применением законов Кирхгофа

$$\begin{cases} I1 + I3 - I4 = 0; \\ I2 + I4 + I5 = 0; \\ I6 - I5 - I3 = 0; \\ -I1 * R1 + I2 * R2 - I4 * R4 = -E1 + E2; \\ I5 * R5 - I2 * R2 + I6 * R6 = -E2; \\ I4 * R4 - I5 * R5 + I3 * R3 = E3 \end{cases}$$

Решаем систему уравнений с помощью системы mathcad. Составим матрицу коэффициентов размерности **a** и вектор свободных членов размерности **b**:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ -25 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты в матрице соответствуют коэффициентам при неизвестных в исходных уравнениях.

Решением получаем вектор неизвестных решений

$$X1 = \begin{pmatrix} -2.883 \\ 3.456 \\ 2.803 \\ -0.08 \\ -3.376 \\ -0.573 \end{pmatrix}$$

где:

$$I1 = -2,883A;$$

$$I2 = 3,456A;$$

$$I3 = 2,803A;$$

$$I4 = -0,08A;$$

$$I5 = -3,376A;$$

$$I6 = -0,573A$$

2. Определение токов в цепи методом контурных токов

Составим систему уравнений для контурных токов

$$\begin{cases} I11 * (R1 + R2 + R4) - I33 * R2 - I22 * R4 = -E1 + E2; \\ I22 * (R4 + R5 + R3) - I11 * R4 - I33 * R5 = E3; \\ I33 * (R5 + R2 + R6) - I11 * R2 - I22 * R5 = -E2 \end{cases}$$

Составим матрицу коэффициентов размерности **d** и вектор свободных членов размерности **f**:

$$d := \begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -4 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \quad f := \begin{pmatrix} 13 \\ 30 \\ -25 \end{pmatrix}$$

Решением получаем вектор неизвестных решений

$$X2 = \begin{pmatrix} 2.883 \\ 2.803 \\ -0.573 \end{pmatrix}$$

где:

$$I11 = 2,883A;$$

$$I22 = 2,803A;$$

$$I33 = -0,573A;$$

Определим токи в ветвях:

$$\begin{aligned}
I_1 &= -I_{11} = -2,883 A; \\
I_2 &= I_{11} - I_{33} = 2,883 + 0,573 = 3,456 A; \\
I_3 &= I_{22} = 2,803 A; \\
I_4 &= I_{22} - I_{11} = 2,803 - 2,883 = -0,08 A; \\
I_5 &= I_{33} - I_{22} = -0,573 - 2,803 = -3,376 A; \\
I_6 &= I_{33} = -0,573 A
\end{aligned}$$

3. Определение токов в цепи методом узловых потенциалов

Для составления уравнений методом узловых потенциалов мысленно заземляем узел **b**. Определим проводимости в соответствии с принятой нумерацией узлов (см. рис.):

$$\begin{aligned}
G_{11} &= 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_6 = 1/2 + 1/2 + 1/8 = 1,125 \text{ См}; \\
G_{22} &= 1/R_1 + 1/R_4 + 1/R_3 = 1/2 + 1/4 + 1/6 = 0,917 \text{ См}; \\
G_{33} &= 1/R_6 + 1/R_5 + 1/R_3 = 1/8 + 1/4 + 1/6 = 0,542 \text{ См}; \\
G_{12} &= G_{21} = -(1/R_1) = -1/2 = -0,5 \text{ См}; \\
G_{13} &= G_{31} = -(1/R_6) = -0,125 \text{ См}; \\
G_{23} &= G_{32} = -(1/R_3) = -1/6 = -0,167 \text{ См}
\end{aligned}$$

Определим узловые токи:

$$\begin{aligned}
J_{11} &= -E_1/R_1 - E_2/R_2 = -12/2 - 25/2 = -18,5 A; \\
J_{22} &= E_3/R_3 + E_1/R_1 = 30/6 + 12/2 = 11 \text{ См}; \\
J_{33} &= -E_3/R_3 = -30/6 = -5 A
\end{aligned}$$

Составим систему уравнений для узловых потенциалов при $u_4 = 0$

$$\begin{cases}
G_{11} * u_1 + G_{12} * u_2 + G_{13} * u_3 = J_{11}; \\
G_{21} * u_1 + G_{22} * u_2 + G_{23} * u_3 = J_{22}; \\
G_{31} * u_1 + G_{32} * u_2 + G_{33} * u_3 = J_{33}
\end{cases}$$

Составим матрицу коэффициентов размерности **h** и вектор свободных членов размерности **k**:

$$\mathbf{h} := \begin{pmatrix} 1.125 & -0.5 & -0.125 \\ -0.5 & 0.917 & -0.167 \\ -0.125 & -0.167 & 0.542 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} := \begin{pmatrix} -18.5 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Решением получаем вектор неизвестных решений

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -18.089 \\ -0.325 \\ -13.497 \end{pmatrix}$$

здесь:

$$\begin{aligned}
u_1 &= -18,089 \text{ В}; \\
u_2 &= -0,325 \text{ В}; \\
u_3 &= -13,497 \text{ В}
\end{aligned}$$

Определим токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{E_1 - (u_2 - u_1)}{R_1} = \frac{12 - (-0,325 + 18,089)}{2} = -2,882 A;$$

$$I_2 = \frac{E_2 - (u_4 - u_1)}{R_2} = \frac{25 - (0 + 18,089)}{2} = 3,456 A;$$

$$I_3 = \frac{E_3 - (u_2 - u_3)}{R_3} = \frac{30 - (-0,325 + 13,497)}{6} = 2,805 A;$$

$$I_4 = \frac{(u_2 - u_4)}{R_4} = \frac{-0,325 + 0}{4} = -0,081 A;$$

$$I_5 = \frac{(u_3 - u_4)}{R_5} = \frac{-13,497 - 0}{4} = -3,374 A;$$

$$I_6 = \frac{(u_1 - u_3)}{R_6} = \frac{-18,089 + 13,497}{8} = -0,574 A;$$

4. Напряжение между точками а и б

$$U_{ab} = u_2 - u_3 = -0,325 + 13,497 = 13,172 B$$

5. Баланс мощностей

Мощность источника

$$P_{ист} = E_1 * I_1 + E_2 * I_2 + E_3 * I_3 = -12 * 2,883 + 25 * 3,456 + 30 * 2,803 = 135,894 Bm$$

Мощность потребителя

$$P_{потр} = \sum I^2 * R = I_1^2 * R_1 + I_2^2 * R_2 + I_3^2 * R_3 + I_4^2 * R_4 + I_5^2 * R_5 + I_6^2 * R_6 =$$

$$= 2,883^2 * 2 + 3,456^2 * 2 + 2,803^2 * 6 + 0,08^2 * 4 + 3,376^2 * 4 + 0,573^2 * 8 = 135,894 Bm$$

$$P_{ист} \approx P_{потр}$$

6. Потенциальная диаграмма для внешнего контура.

Принимаем потенциал точки 1 равным 0. Далее в обходе по контуру по часовой стрелке:

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = u_1 + E_1 = 0 + 12 = 12 B;$$

$$u_3 = u_2 - I_1 * R_1 = 12 + 2,883 * 2 = 17,766 B;$$

$$u_4 = u_3 - E_3 = 17,766 - 30 = -12,234 B;$$

$$u_5 = u_4 + I_3 * R_3 = -12,234 + 2,803 * 6 = 4,584 B;$$

$$u_1 = u_5 + I_6 * R_6 = 4,584 - 0,574 * 8 = 0$$

Пример 2

Расчет разветвленной цепи переменного тока с одним источником методом эквивалентных преобразований. По результатам расчета составляется баланс мощностей, строится потенциальная диаграмма.

Дано:

$$U = B;$$

$$U_{ab} = B;$$

$$U_{bc} = 810B;$$

$$I_1 = A;$$

$$I_2 = A;$$

$$I_3 = A;$$

$$R_1 = 5\text{ Ом};$$

$$R_2 = 7\text{ Ом};$$

$$R_3 = 6\text{ Ом};$$

$$X_{L1} = 0\text{ Ом};$$

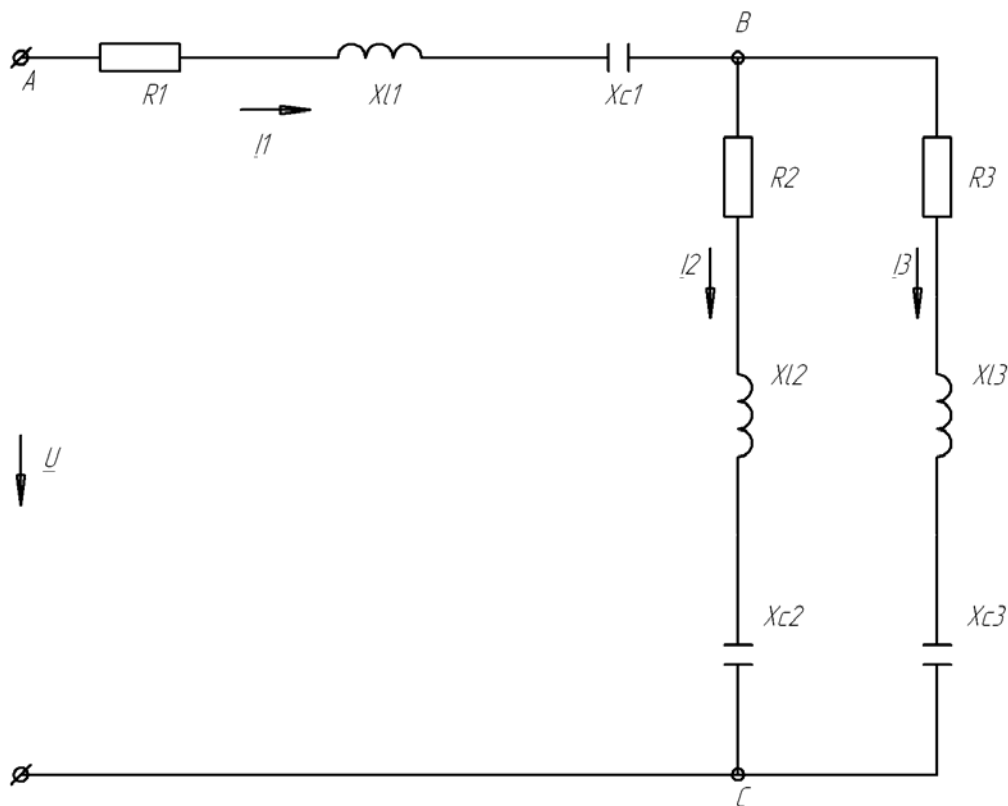
$$X_{L2} = 3\text{ Ом};$$

$$X_{L3} = 0\text{ Ом};$$

$$X_{C1} = 6\text{ Ом};$$

$$X_{C2} = 0\text{ Ом};$$

$$X_{C3} = 0\text{ Ом}$$



Решение:

7. Определение комплексных сопротивлений ветвей

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2} \times e^{j \arctg\left(\frac{X_{L1} - X_{C1}}{R_1}\right)} = \sqrt{5^2 + (0 - 6)^2} \times e^{j \arctg\left(\frac{0-6}{5}\right)} = 7,811 * e^{-j50,194}$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (X_{L2} - X_{C2})^2} \times e^{j \arctg\left(\frac{X_{L2} - X_{C2}}{R_2}\right)} = \sqrt{7^2 + (3 - 0)^2} \times e^{j \arctg\left(\frac{3-0}{7}\right)} = 7,616 * e^{j23,199}$$

$$Z_3 = \sqrt{R_3^2 + (X_{L3} - X_{C3})^2} \times e^{j \arctg\left(\frac{X_{L3} - X_{C3}}{R_3}\right)} = \sqrt{6^2 + (0 - 0)^2} \times e^{j \arctg\left(\frac{0-0}{6}\right)} = 6 * e^{j0}$$

8. Полное сопротивление цепи

$$Z_{23} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 * Z_3} = \frac{7 + 6 + j(3 - 0 + 0 - 0)}{7,616 * e^{j23,199} * 6 * e^{j0}} = 3,425 * e^{j10,204}$$

$$Z = Z_{23} + Z_1 = 3,371 + j0,607 + 5 - j6 = 9,958 * e^{-j32,794}$$

9. Определение токов и напряжений в ветвях

Принимаем фазовый угол $\varphi_{U_{bc}} = 0$

$$I_2 = \frac{U_{bc}}{Z_2} = \frac{810 * e^{j0}}{7,616 * e^{j23,199}} = 106,355 * e^{-j23,199};$$

$$I_3 = \frac{U_{bc}}{Z_3} = \frac{810 * e^{j0}}{6 * e^{j0}} = 135 * e^{j0}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 97,755 - j41,896 + 135 = 232,755 - j41,896 = 236,5 * e^{-j10,204}$$

$$U = I_1 * Z = 236,5 * e^{-j10,204} * 9,958 * e^{-j32,794} = 2355,067 * e^{-j42,998};$$

$$U_{ab} = U - U_{bc} = 1722,443 - j1606,1 - 810 = 912,443 - j1606,1 = 1847,2 * e^{-j60,399}$$

10. Баланс мощностей

Активная мощность

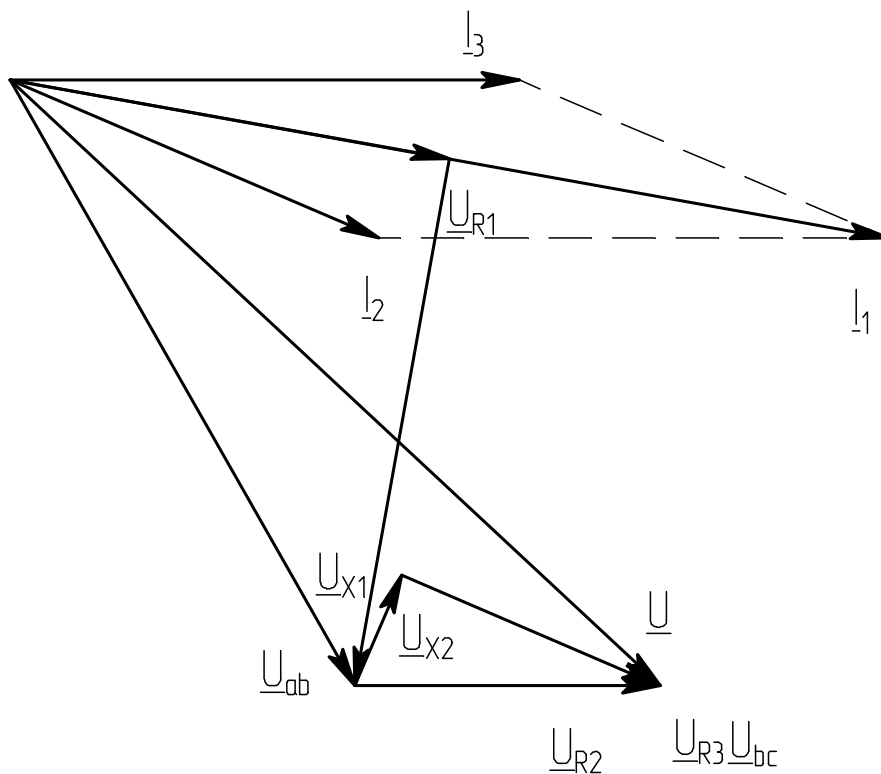
$$P_{ист} = U * I_1 * \cos(\varphi_U - \varphi_{I_1}) = 2355,067 * 236,5 * \cos(-42,998 + 10,204) = 468,204 \text{ кВт}$$

$$P_{потр} = \sum I^2 * R = I_1^2 * R_1 + I_2^2 * R_2 + I_3^2 * R_3 = 236,5^2 * 5 + 106,355^2 * 7 + 135^2 * 6 = 468,19 \text{ кВт}$$

Реактивная мощность

$$Q_{ист} = U * I_1 * \sin(\varphi_U - \varphi_{I_1}) = 2355,067 * 236,5 * \sin(-42,998 + 10,204) = -301,668 \text{ кВар}$$

$$Q_{потр} = \sum I^2 * (Xl - Xc) = I_1^2 * (Xl_1 - Xc_1) + I_2^2 * (Xl_2 - Xc_2) + I_3^2 * (Xl_3 - Xc_3) = 236,5^2 * (0 - 6) + 106,355^2 * (3 - 0) + 135^2 * (0 - 0) = -301,659 \text{ кВар}$$



Пример 3

Расчет цепи переменного тока с двумя узлами методом двух узлов. По результатам расчета составляется баланс мощностей.

Дано:

$$E1 = 40e^{-j60} \text{ В};$$

$$E2 = 81e^{j0} \text{ В};$$

$$E3 = 20e^{j0} \text{ В};$$

$$R1 = 5 \text{ Ом};$$

$$R2 = 7 \text{ Ом};$$

$$R3 = 6 \text{ Ом};$$

$$Xl1 = 0 \text{ Ом};$$

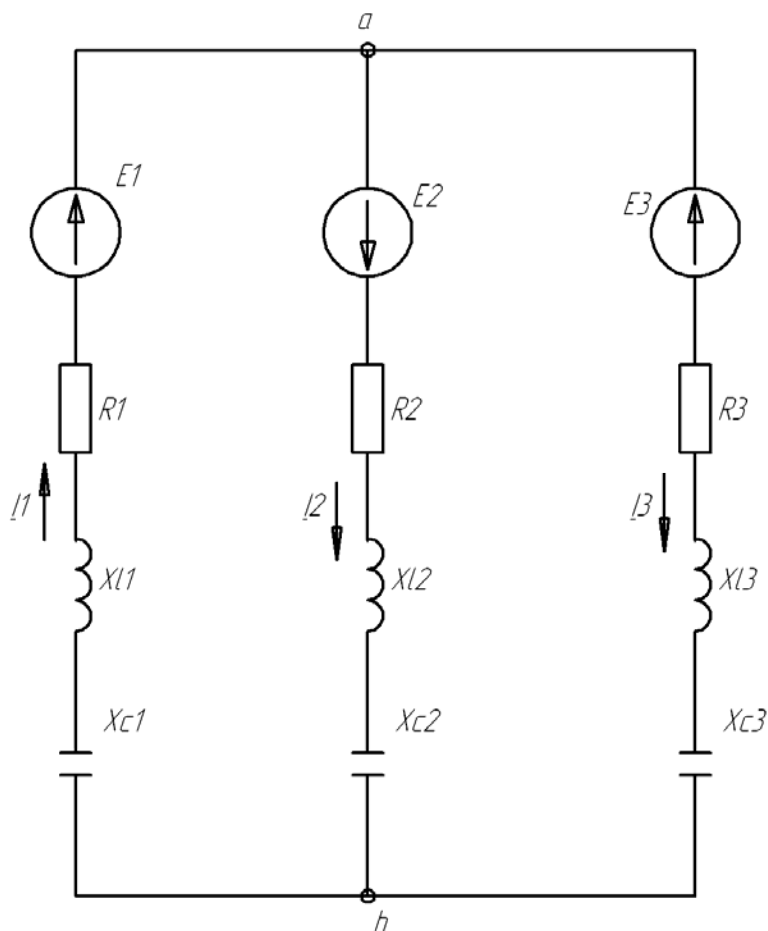
$$Xl2 = 3 \text{ Ом};$$

$$Xl3 = 0 \text{ Ом};$$

$$Xc1 = 6 \text{ Ом};$$

$$Xc2 = 0 \text{ Ом};$$

$$Xc3 = 0 \text{ Ом}$$



Решение:

11. Определение комплексных сопротивлений ветвей

$$Z1 = \sqrt{R1^2 + (Xl1 - Xc1)^2} \times e^{j \arctg(\frac{Xl1 - Xc1}{R1})} = \sqrt{5^2 + (0 - 6)^2} \times e^{j \arctg(\frac{0-6}{5})} = 7,811 * e^{-j50,194}$$

$$Z2 = \sqrt{R2^2 + (Xl2 - Xc2)^2} \times e^{j \arctg(\frac{Xl2 - Xc2}{R2})} = \sqrt{7^2 + (3 - 0)^2} \times e^{j \arctg(\frac{3-0}{7})} = 7,616 * e^{j23,199}$$

$$Z3 = \sqrt{R3^2 + (Xl3 - Xc3)^2} \times e^{j \arctg(\frac{Xl3 - Xc3}{R3})} = \sqrt{6^2 + (0 - 0)^2} \times e^{j \arctg(\frac{0-0}{6})} = 6 * e^{j0}$$

12. Проводимости ветвей

$$G1 = 1/Z1 = 1/7,811 * e^{-j50,194} = 0,128 * e^{j50,194};$$

$$G2 = 1/Z2 = 1/7,616 * e^{j23,199} = 0,131 * e^{-j23,199};$$

$$G3 = 1/Z3 = 1/6 * e^{j0} = 0,167 * e^{j0}$$

13. Узловое напряжение

$$\begin{aligned}
 U_{ab} &= \frac{E1 * G1 - E2 * G2 + E3 * G3}{G1 + G2 + G3} = \\
 &= \frac{40 * e^{-j60} * 0,128 * e^{j50,194} - 81 * 0,131 * e^{-j23,199} + 20 * 0,167 * e^{j0}}{0,063 * e^{j18,435} + 0,088 * e^{-j37,875} + 0,128 * e^{j39,806}} = \\
 &= \frac{5,047 - j0,872 - 9,776 + j4,190 + 3,333}{0,082 + j0,098 + 0,121 - j0,052 + 0,167} = 9,668 * e^{j105,623}
 \end{aligned}$$

14. Токи в ветвях

$$I1 = (E1 - U_{ab}) * G1 = (20 - j34,641 + 2,604 - j9,311) * 0,128 * e^{j50,194} = 6,328 * e^{-j12,590};$$

$$I2 = (E2 + U_{ab}) * G2 = (81 + 2,604 - j9,311) * 0,131 * e^{-j23,199} = 10,366 * e^{-j16,425};$$

$$I3 = (-E3 + U_{ab}) * G3 = (-20 + 2,604 - j9,311) * 0,167 * e^{j0} = 4,074 * e^{j157,612};$$

15. Баланс мощностей

Активная мощность

$$\begin{aligned}
 P_{ист} &= E1 * I1 * \cos(\varphi_{E1} - \varphi_{I1}) + E2 * I2 * \cos(\varphi_{E2} - \varphi_{I2}) - E3 * I3 * \cos(\varphi_{E3} - \varphi_{I3}) = \\
 &= 40 * 6,328 * \cos(-60 + 12,59) + 81 * 10,366 * \cos(0 + 16,425) + 20 * 4,074 * \cos(0 - 157,612) = \\
 &= 1052,048 \text{ Вт}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{номр} &= \sum I^2 * R = I1^2 * R1 + I2^2 * R2 + I3^2 * R3 = 6,328^2 * 5 + 10,366^2 * 7 + 4,074^2 * 6 = \\
 &= 1052,048 \text{ Вт}
 \end{aligned}$$

Реактивная мощность

$$\begin{aligned}
 Q_{ист} &= E1 * I1 * \sin(\varphi_{E1} - \varphi_{I1}) + E2 * I2 * \sin(\varphi_{E2} - \varphi_{I2}) - E3 * I3 * \sin(\varphi_{E3} - \varphi_{I3}) = \\
 &= 40 * 6,328 * \sin(-60 + 12,59) + 81 * 10,366 * \sin(0 + 16,425) + 20 * 4,074 * \sin(0 - 157,612) = \\
 &= 82,111 \text{ Вар}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{номр} &= \sum I^2 * (Xl - Xc) = I1^2 * (Xl1 - Xc1) + I2^2 * (Xl2 - Xc2) + I3^2 * (Xl3 - Xc3) = \\
 &= 6,328^2 * (0 - 6) + 10,366^2 * (3 - 0) + 4,074^2 * (0 - 5) = 82,111 \text{ Вар}
 \end{aligned}$$

Пример 4

Расчет трехфазной цепи при соединении потребителей звездой с учетом заданной в исходных данных начальной фазы фазного напряжения. По результатам строится векторная диаграмма токов и напряжений.

Дано:

$$U_c = 81e^{j60} \text{ В};$$

$$R_1 = 5 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 7 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 6 \text{ Ом};$$

$$X_{L1} = 0 \text{ Ом};$$

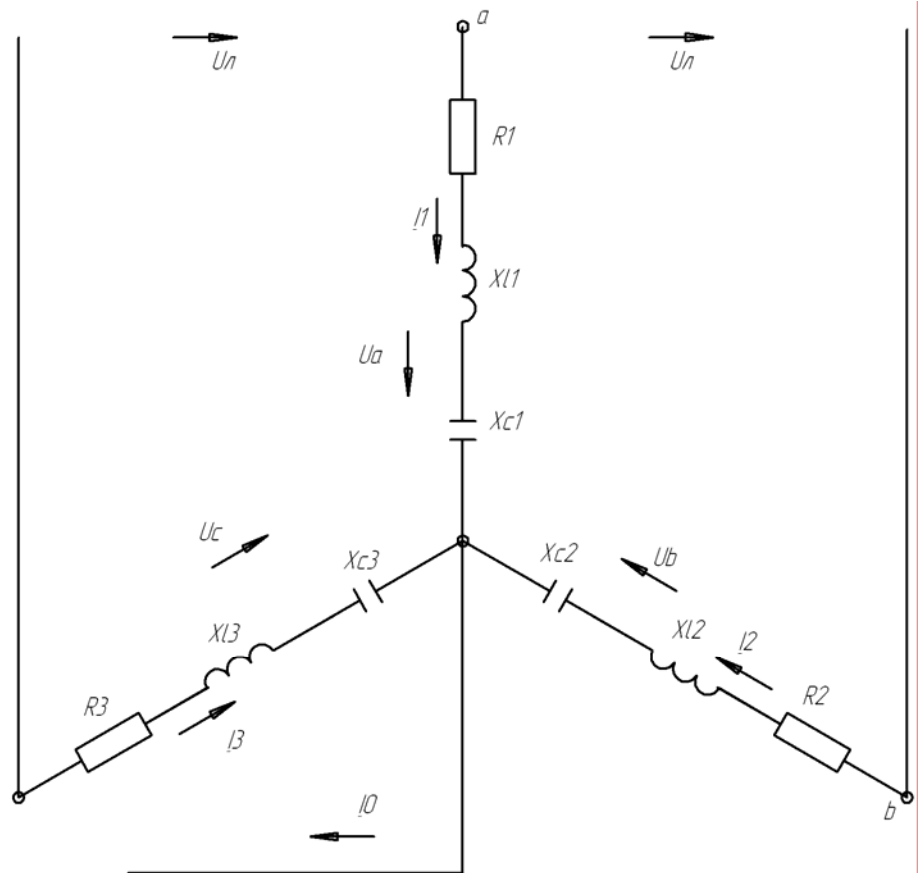
$$X_{L2} = 3 \text{ Ом};$$

$$X_{L3} = 0 \text{ Ом};$$

$$X_{C1} = 6 \text{ Ом};$$

$$X_{C2} = 0 \text{ Ом};$$

$$X_{C3} = 0 \text{ Ом}$$



Решение:

16. Определение комплексных сопротивлений ветвей

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2} \times e^{j \arctg\left(\frac{X_{L1} - X_{C1}}{R_1}\right)} = \sqrt{5^2 + (0 - 6)^2} \times e^{j \arctg\left(\frac{0-6}{5}\right)} = 7,811 * e^{-j50,194}$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (X_{L2} - X_{C2})^2} \times e^{j \arctg\left(\frac{X_{L2} - X_{C2}}{R_2}\right)} = \sqrt{7^2 + (3 - 0)^2} \times e^{j \arctg\left(\frac{3-0}{7}\right)} = 7,616 * e^{j23,199}$$

$$Z_3 = \sqrt{R_3^2 + (X_{L3} - X_{C3})^2} \times e^{j \arctg\left(\frac{X_{L3} - X_{C3}}{R_3}\right)} = \sqrt{6^2 + (0 - 0)^2} \times e^{j \arctg\left(\frac{0-0}{6}\right)} = 6 * e^{j0}$$

17. Фазные напряжения

$$U_a = 81 * e^{-j60};$$

$$U_b = 81 * e^{j180}$$

18. Токи в ветвях

$$I_a = \frac{U_a}{Z_1} = \frac{81 * e^{-j60}}{7,811 * e^{-j50,194}} = 10,371 * e^{-j9,806} \text{ А};$$

$$I_b = \frac{U_b}{Z_2} = \frac{81 * e^{j180}}{7,616 * e^{j23,199}} = 10,636 * e^{j156,801} \text{ А};$$

$$I_c = \frac{U_c}{Z_3} = \frac{81 * e^{j60}}{6 * e^{j0}} = 13,5 * e^{j60} \text{ А}$$

19. Ток в нейтральном проводе

$$I_0 = I_a + I_b + I_c = 10,219 - j1,766 - 9,776 + j4,19 + 6,75 + j11,691 =$$

$$= 7,194 + j14,115 = 15,842 * e^{j62,994} A$$

