Задача 1

Для заданного поперечного сечения , состоящего из равнополочного двутавра (№24а ГОСТ 8509-86) и швеллера №24 (ГОСТ 8240-89), требуется:

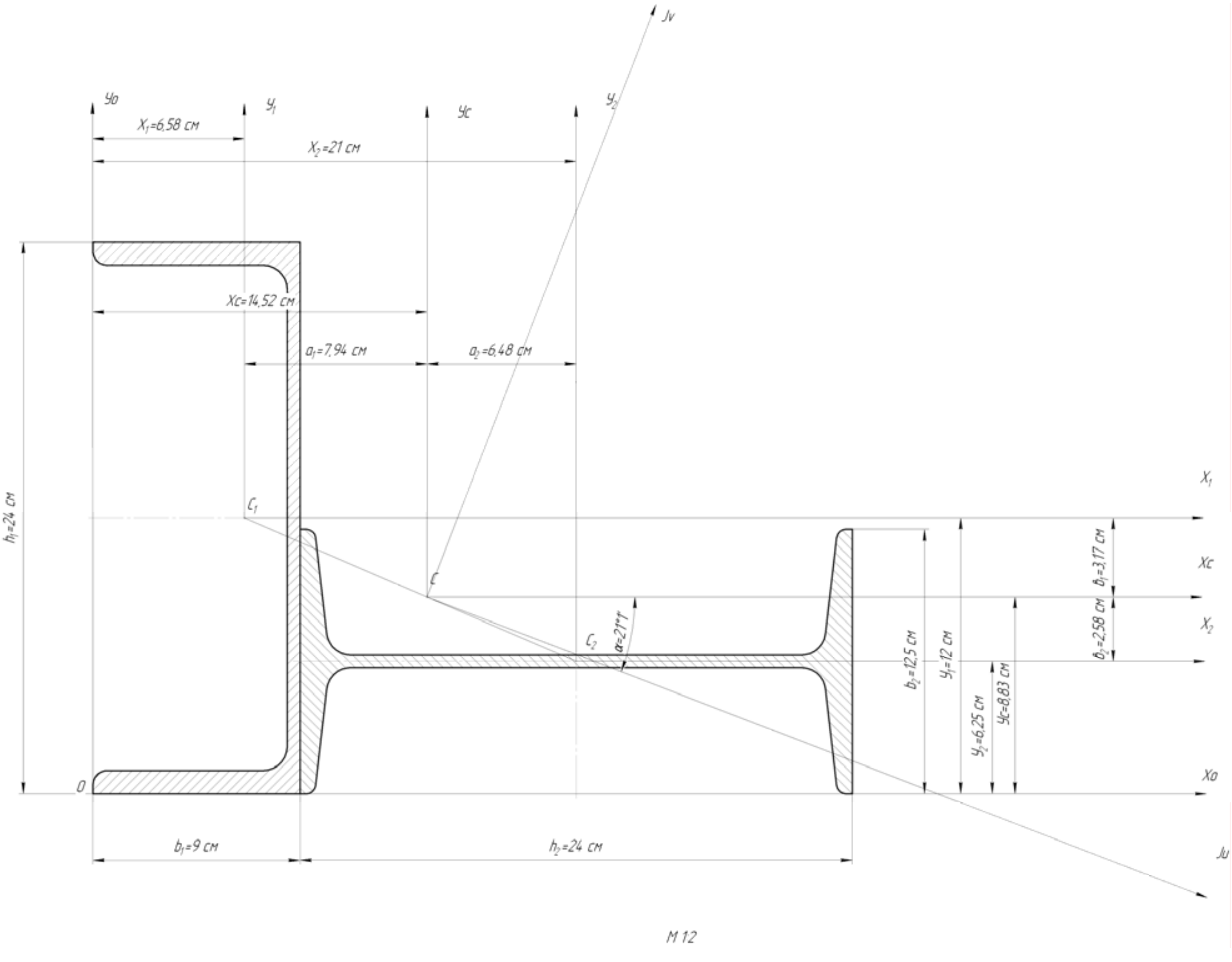
1. Вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все оси и размеры в числах. Не следует заменять части профилей прямоугольниками.

2. Определить положение центра тяжести сечения.

3. Найти осевые и центробежный момент инерции относительно случайных осей X и Y, проходящих через центр тяжести.

4. Определить направление главных центральных осей U и V.

5. Найти моменты инерции относительно главных центральных осей.



Решение

Вычерчиваем сечение в масштабе 1:2. Требуемые для этого размеры и координаты центров тяжести берем из сортамента прокатной стали. Каждому профилю присваиваем порядковый номер и через центры тяжести C_1 и C_2 проводим горизонтальные X_1, X_2 и вертикальные Y_1, Y_2 оси координат. Выбираем вспомогательные координатные оси X_0OY_0 и выписываем все необходимые геометрические характеристики для каждого профиля:

1. Швеллер №24 (ГОСТ 8240-89): F_1 = 30,6 см^2; h_1 = 24 см; b_1=9 см; Jx_1= 2900 см^4; Jy_1=208 см^4; Zo=2,42 см
2. Двутавр №24 а (ГОСТ 8509-86): F_2 = 37,5 см^2; Jx_2= 260 см^4; Jy_2=3800 см^4; h_2 = 24 см; b_2=12,5 см;.

3. Определяем положение центра тяжести сечения в системе координат X_0OY_0.

Координаты точки C_1 в системе ХоОУо

$x_1=b_1-z_0=9-2,42=6,58$ см.

$y_1=h_1/2=24/2=12$ см.

Координаты точки C_2 в системе ХоОУо

$X_2=b_2+h_2/2=9+24/2=21$ см.

$y_2=b_2/2=12,5/2=6,25$ см.

$$x_c = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} = \frac{30,6 \cdot 6,58 + 37,5 \cdot 21}{30,6 + 37,5} = 14,52 \text{ см;}$$

$$y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} = \frac{30,6 \cdot 12 + 37,5 \cdot 6,25}{30,6 + 37,5} = 8,83 \text{ см.}$$

Центр тяжести сечения (точка C) должен лежать на линии C_1C_2. Через точку C проводим центральные оси Xc и Yc, параллельные вспомогательным осям X_o и Y_o. Вычисляем координаты центров тяжести каждого профиля относительно осей Xc и Yc.

Координаты точки C_1 в системе ХсСУс

$$a_1 = x_1 - x_c = 6,58 - 14,52 = -7,94 \text{ см;}$$

$$b_1 = y_1 - x_c = 12 - 8,83 = 3,17 \text{ см;}$$

Координаты точки C_2 в системе ХсСУс

$$a_2 = x_2 - x_c = 21 - 14,52 = 6,48 \text{ см;}$$

$$b_2 = y_2 - x_c = 6,25 - 8,83 = -2,58 \text{ см}$$

Проверка: $a_1 / a_2 = b_1 / b_2 = F_2 / F_1$; 7,94 / 6,48 = 3,17 / 2,58 = 37,5 / 30,6 = 1,23.

4. Вычисляем осевые и центробежный момент инерции всего сечения относительно главных центральных осей.

$$Jx_c = Jx_1 + (a_1)^2 F_1 + Jx_2 + (a_2)^2 F_2 = 2900 + (3,17)^2 30,6 + 260 + (-2,58)^2 37,5 = 3717,11 \text{ см}^4;$$

$$Jy_c = Jy_1 + (b_1)^2 F_1 + Jy_2 + (b_2)^2 F_2 = 208 + (-7{,}94)^2 30{,}6 + 3800 + (6{,}48)^2 \cdot 37{,}5 = 7511{,}77 \text{ см}^4;$$

$$Jx_c y_c = I^{I}_{x_1 y_1} + a_1 b_1 F_1 + I^{II}_{x_2 y_2} + a_2 b_2 F_2 =$$

$$= 0 + 3{,}17 \cdot (-7{,}94) \cdot 30{,}6 + 0 + (-2{,}58) \cdot 6{,}48 \cdot 37{,}5 = -1397{,}14 \text{ см}^4.$$

5. Определяем угол наклона главных центральных осей U и V.

$$tq 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2(-1397{,}14)}{3717{,}11 - 7511{,}77} = -0{,}736;$$

$$2\alpha = arctq\,(-0{,}736) = -42^0\,2'; \quad \alpha = -21^0\,1'.$$

Так как угол $\alpha < 0$, то оси XCY, следует повернуть по часовой стрелке, чтобы они стали главными центральными осями инерции.

6. Вычисляем моменты инерции относительно главных центральных осей

$$I_{max,min} = \frac{1}{2}\left[\left(I_x + I_y\right) \pm \sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(3717{,}11 + 7511{,}77\right) \pm \sqrt{\left(3717{,}11 - 7511{,}77\right)^2 + 4\left(-1397{,}14\right)^2}\right].$$

Так как $I_x < I_y$, то $I_{max} = I_v = 7970{,}68$ см^4, $I_{min} = I_u = 3258{,}2$ см^4.

Проверка: $I_x + I_y = I_v + I_u$,

$I_x + I_y = 3717{,}11 + 7511{,}77 = 11228{,}88$ см^4; $I_v + I_u = 7970{,}68 + 3258{,}2 = 11228{,}88$ см^4.

Задача 2

Стальной стержень (E =2·10^5 МПа) с площадью поперечного сечения F= 14 см^2 и размерами: a = 1,6 м, b = 2,8 м, c = 2,9 м, находится под действием трех сосредоточенных сил P_1 = 1,6 кН, P_2 = 2,8 кН, P_3 = 1,9 кН, направленных вдоль его оси (рис. 8). Требуется:

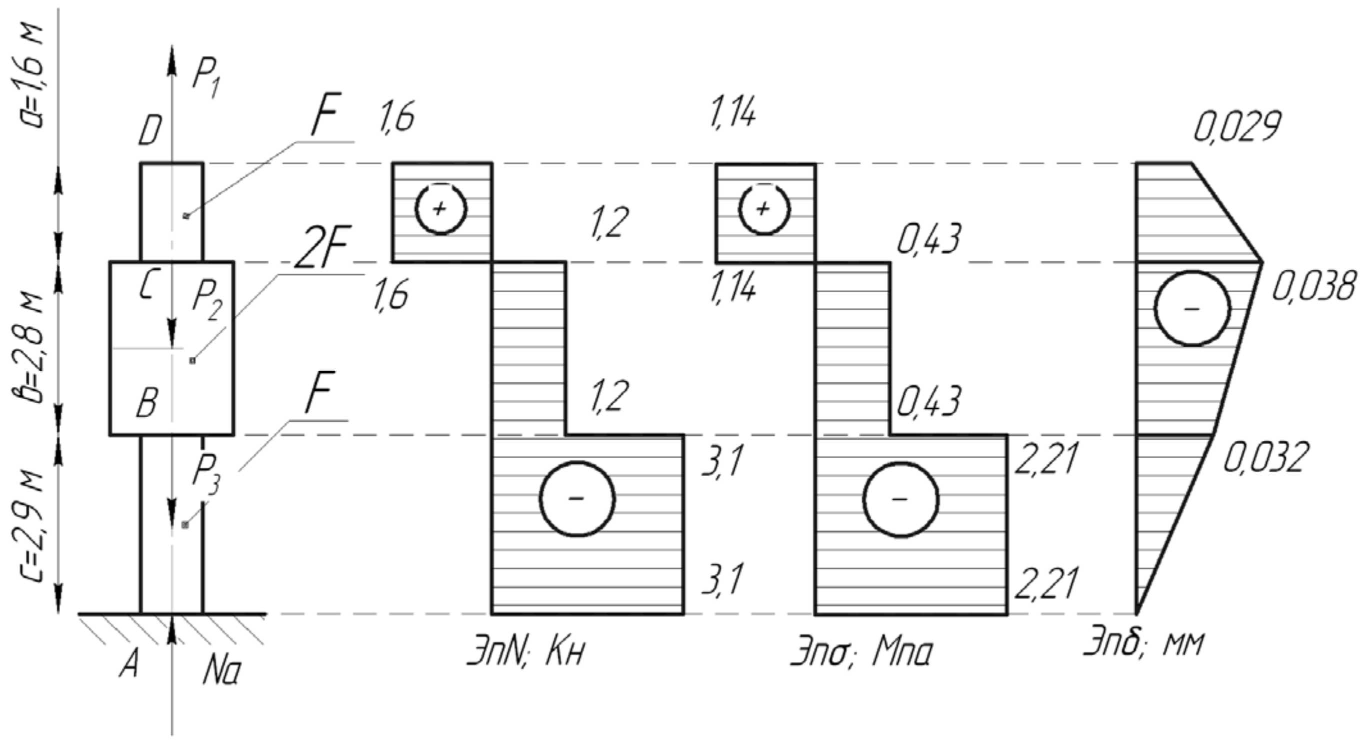
1. Построить эпюру продольных сил N.

2. Определить нормальные напряжения σ в поперечных сечениях и построить эпюру σ по длине стержня.

3. Построить эпюру перемещений δ поперечных сечений.

Решение

1. Строим эпюру продольных сил N. Для этого разбиваем стержень на три участка и для каждого из них записываем выражение для N. Используя метод сечений, каждый раз будем рассматривать силы, расположенные со стороны свободного конца стержня. Продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение отсеченной части и отрицательной, если вызывает ее сжатие.



Участок CD: $N_{CD} = P_1$ = 1,6 кН.

Участок BC: $N_{BC} = P_1 - P_2$ = 1,6 – 2,8 = –1,2 кН.

Участок AB: $N_{AB} = P_1 - P_2 - P_3$ = 1,6 – 2,8 – 1,9 = -3,1 кН.

2. Определяем нормальные напряжения σ в поперечных сечениях стержня и строим эпюру σ.

Участок CD: $\sigma_{CD} = N_{CD} / F = 1{,}6\cdot10^3 / 14\cdot10^{-4} = 1{,}14\cdot10^6$ Па = 1,14 МПа.

Участок BC: $\sigma_{BC} = N_{BC} / 2F = -1{,}2\cdot10^3 / 2\cdot 14\cdot10^{-4} = -0{,}43\cdot10^6$ Па = –0,43 МПа.

Участок AB: $\sigma_{AB} = N_{AB} / F = -3{,}1 \cdot 10^3 / 14 \cdot 10^{-4} = -2{,}21 \cdot 10^6$ Па = -2,21 МПа.

3. Определяем перемещения δ поперечных сечений относительно неподвижного сечения A. Перемещение произвольного сечения с абсциссой x на участке AB можно определить по формуле:

$$\delta(x) = N_{AB} \cdot x / EF = \sigma_{AB} \cdot x / E.$$

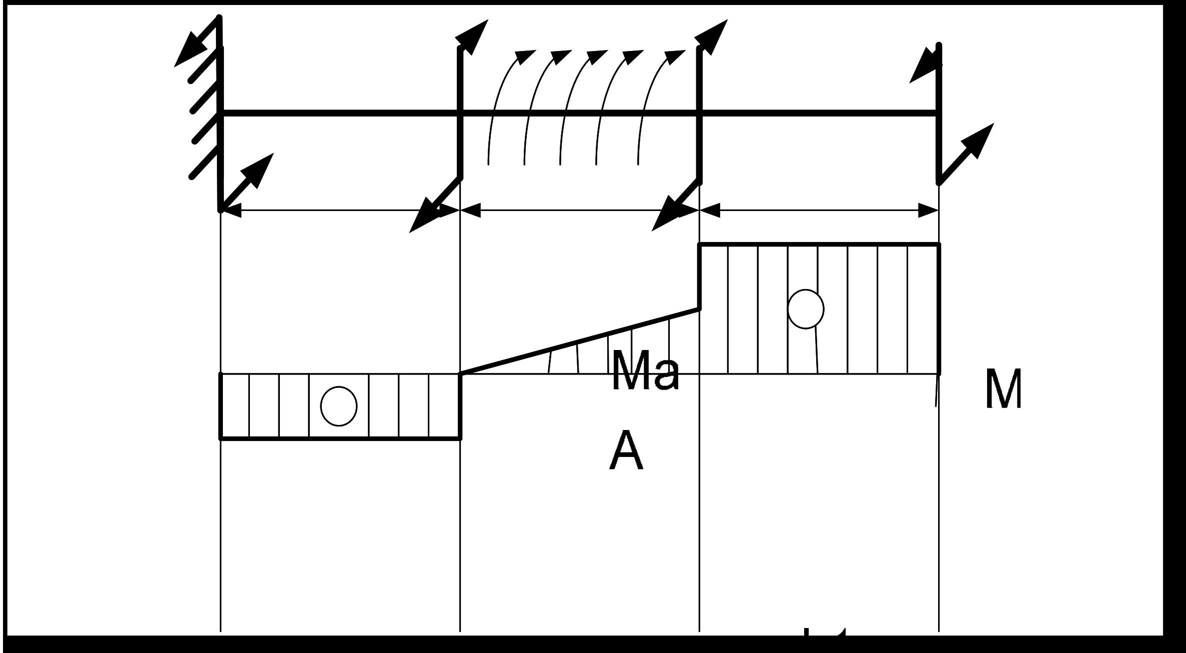
При $x = 0$, $\delta_A = 0$; при $x = c = 2{,}9$ м, $\delta_B = -2{,}21 \cdot 2{,}9 / 2 \cdot 10^5 = -3{,}2 \cdot 10^{-5}$ м =-0,032 мм.

Так как перемещения по длине стержня меняются по линейному закону, то для построения эпюры δ достаточно вычислить перемещения только граничных сечений B, C и D.

$$\delta_B = -0{,}032 \text{ мм},$$

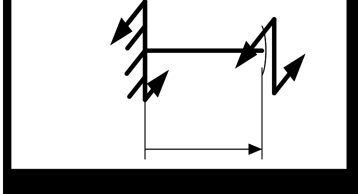
$$\delta_C = \delta_B + \sigma_{BC} \cdot b / E = -3{,}2 \cdot 10^{-5} - 0{,}43 \cdot 2{,}8 / 2 \cdot 10^5 = -3{,}8 \cdot 10^{-5} \text{ м} = -0{,}038 \text{ мм},$$

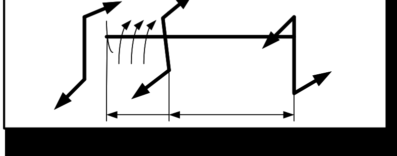
$$\delta_D = \delta_C + \sigma_{CD} \cdot a / E = -3{,}8 \cdot 10^{-5} + 1{,}14 \cdot 1{,}6 / 2 \cdot 10^5 = -2{,}89 \cdot 10^{-5} \text{ м} = -0{,}029 \text{ мм}.$$

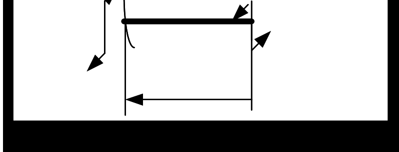


M/L2

L2







Задача 3

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров . Требуется:

1. Установить степень статической неопределимости системы.

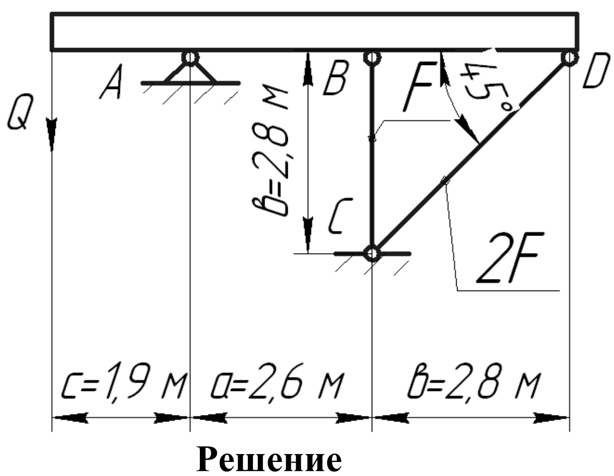
2. Найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q, если
F = 14 см^2. (Для определения двух неизвестных усилий в стержнях следует составить одно уравнение статики и одно дополнительное уравнение из условия совместности деформаций стержней).

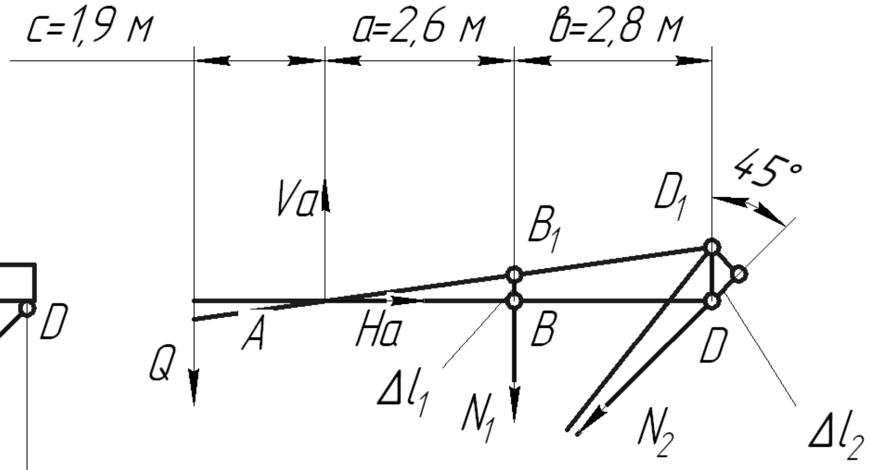
3. Найти допускаемую нагрузку $Q_{доп}$, приравняв большее из напряжений в стержнях допускаемому напряжению $[\sigma]$ = 160 МПа (расчет по допускаемым напряжениям).

4. Найти предельную грузоподъемность системы Q_T^K в предположении, что напряжения в стержнях достигли предела текучести σ_T = 240 МПа.

5. Найти допускаемую нагрузку $Q_{доп}^к$, приняв коэффициент запаса прочности
k = 1,5 (расчет по допускаемым нагрузкам).

6. Сравнить значения допускаемой нагрузки, найденные при расчете по допускаемым напряжениям $Q_{доп}$ (см. п.3) и допускаемым нагрузкам $Q_{доп}^к$ (см. п.5).





Решение

1. Рассматриваемая система один раз статически неопределима, так как для определения четырех неизвестных усилий (N_1, N_2, V_A, H_A) имеем три независимых уравнения статики ($\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M = 0$).

2. Для определения усилий в стержнях N_1 и N_2 запишем уравнение равновесия:

$$\sum M_A = -N_1 \cdot a - N_2 \cos 45^0 (a + в) + Q \cdot c = 0;$$

$$-N_1 \cdot 2{,}6 - N_2 \cdot cos45^0(2{,}6 + 2{,}8) + Q \cdot 1{,}9 = 0;$$
$$- 2{,}6N_1 - 3{,}818N_2 = - 1{,}9Q. \quad (1)$$

Для составления дополнительного уравнения рассмотрим деформацию системы, предполагая, что абсолютно жесткий брус AD, оставаясь прямым, повернется относительно опоры A (рис. 9б). Из подобия треугольников ABB_1 и ADD_1 находим:

$$\Delta l_1 / a = \Delta l_2 / cos45^0 \,(a + в) \quad \text{или} \quad \Delta l_1 = \Delta l_2\, a / cos45^0 \,(a + в).$$

Деформации стержней Δl_1 и Δl_2 выражаем через усилия N_1 и N_2 по закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{N_1 в}{EF}, \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{N_2 в}{\cos 45^0\, E2F}.$$

После подстановки в условие совместности получаем дополнительное уравнение:

$$N_1 = \frac{a}{(a + в)} N_2 = \frac{2{,}6}{2{,}6 + 2{,}8} N_2 \qquad \text{или} \qquad N_1 = 0{,}481\, N_2. \qquad (2)$$

Таким образом, получаем систему двух уравнений (1) и (2) с двумя неизвестными N_1 и N_2, решая которую находим: $N_1 = 0{,}18\, Q$, $N_2 = 0{,}37\, Q$.

Напряжения в стержнях

$$\sigma_{(1)} = N_1 / F_1 = 0{,}18\, Q / 14 \cdot 10^{-4} = 129\, Q,$$
$$\sigma_{(2)} = N_2 / F_2 = 0{,}37\, Q / 28 \cdot 10^{-4} = 132\, Q.$$

3. Находим допускаемую нагрузку $Q_{доп}$, приравняв большее из напряжений в стержнях допускаемому напряжению $[\sigma]$ = 160 МПа (расчет по допускаемым напряжениям).

Так как $\sigma_{(1)} > \sigma_{(2)}$, то 132 $Q_{доп} = [\sigma]$; $Q_{доп} = [\sigma] / 132 = 160 \cdot 10^6 / 132 = 1212121$ Н.

4. Находим предельную грузоподъемность системы Q_T^K в предположении, что напряжения в стержнях достигли предела текучести σ_T= 240 МПа. Для этого в уравнении равновесия (1) заменим усилия N_1 и N_2 их предельными значениями:

$$N_1 = \sigma_T \cdot F, \quad N_2 = \sigma_T \cdot 2F, \qquad -2{,}5\, \sigma_T \cdot F - 3{,}818\, \sigma_T \cdot 2F = -1{,}9 Q_T^K,$$
$$Q_T^K = \sigma_T \cdot F\,(2{,}6 + 3{,}818 \cdot 2) / 1{,}9 = 240 \cdot 10^6 \cdot 14 \cdot 10^{-4} \cdot 10{,}236 / 1{,}9 = 1810156 \text{ Н}.$$

5. Находим допускаемую нагрузку $Q^к_{доп}$, приняв коэффициент запаса прочности k = 1,5 (расчет по допускаемым нагрузкам). $Q^к_{доп} = Q_T^K / k = 1810156 / 1{,}5 = 120677$ Н.

6. Сравниваем значения допускаемой нагрузки, найденные при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам

$$Q^к_{доп} / Q_{доп} = 120677 / 1212121 = 0{,}99$$

следовательно, расчеты равнозначны.

Задача 4

К стальному валу приложены три известных момента M_1 = 1,6 кН·м, M_2 = 1,8 кН·м, M_3 = 1,9 кН·м Требуется:

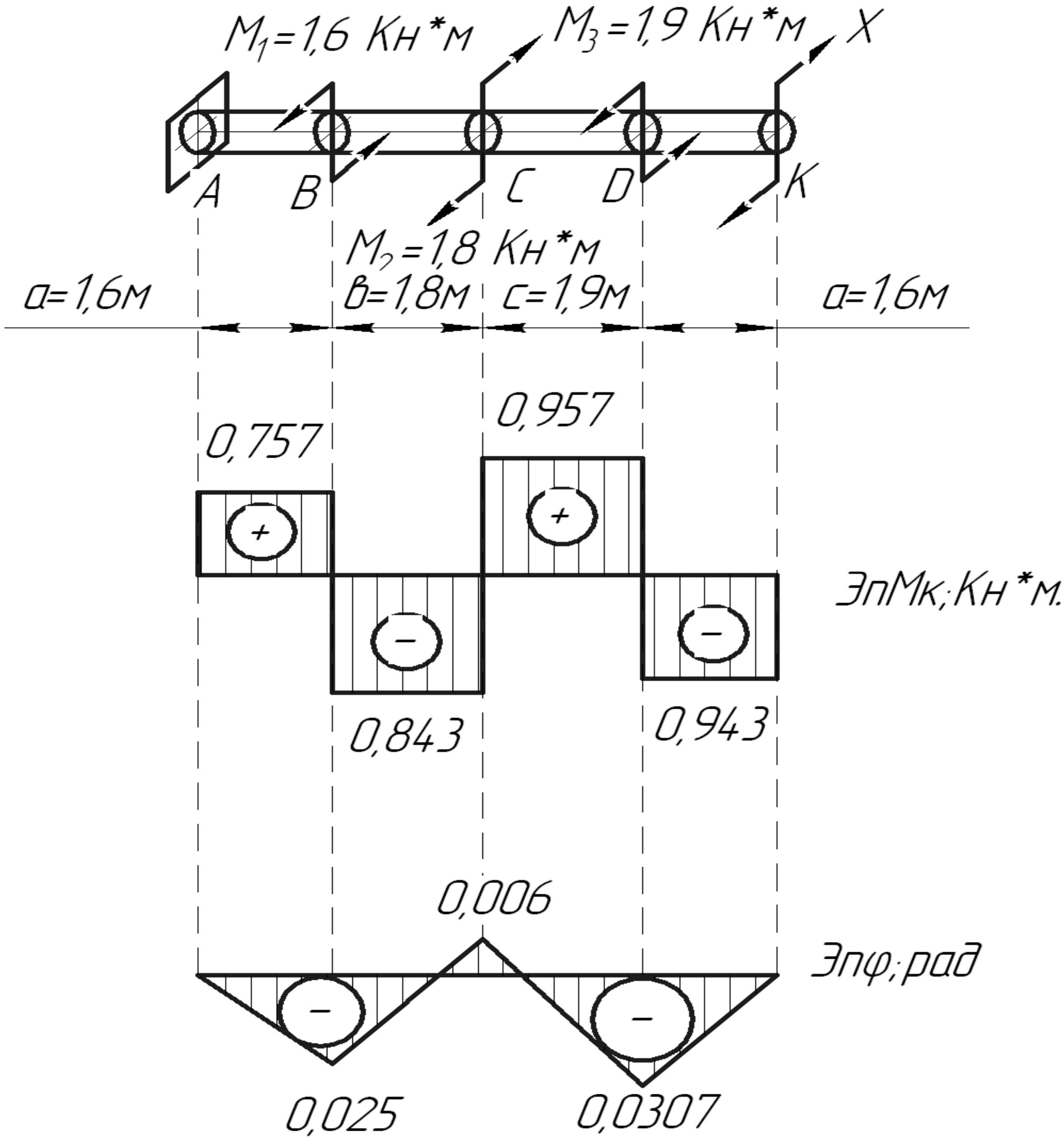
1. Установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю.

2. Для найденного значения момента X построить эпюру крутящих моментов.

3. При заданном $[\tau]$ = 50 МПа определить из условия прочности диаметр вала и округлить его до ближайшей большей величины, равной: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм.

4. Построить эпюру углов закручивания ($G = 8 \cdot 10^4$ МПа).

5. Найти наибольший относительный угол закручивания (на 1м длины).



Решение

1. Установим, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала φ_K равен нулю. В соответствии с принципом независимости действия сил имеем:

$$\varphi_K = \frac{-X(2a+b+c)}{GI_P} + \frac{M_3(a+b+c)}{GI_P} - \frac{M_2(a+b)}{GI_P} + \frac{M_1 a}{GI_P} = 0,$$

$$X = \frac{M_1 a - M_2(a+b) + M_3(a+b+c)}{2a+b+c} = \frac{1{,}6\cdot 1{,}6 - 1{,}8(1{,}6+1{,}8) + 1{,}9(1{,}6+1{,}8+1{,}9)}{2\cdot 1{,}6 + 1{,}8 + 1{,}9} = 0{,}943 \text{ кН·м.}$$

2 Разбиваем вал на четыре участка, границами которых служат сечения, где приложены внешние моменты. Реакцию в заделке не вычисляем, так как при определении крутящих моментов M_K на каждом участке можно рассматривать часть вала со стороны свободного конца.

Участок DK M_K^{DK} = -X = -0943 кН·м.

Участок CD M_K^{CD} =- $X + M_3$ = -0,943 + 1,9 = 0,957 кН·м.

Участок BC M_K^{BC} = -$X + M_3 - M_2$ = -0,943 + 1,9 –1,8 = – 0,843 кН·м.

Участок AB M_K^{AB} = -$X + M_3 - M_2 + M_1$ = -0,943 + 1,9 –1,8 +1,6 = 0,757 кН·м.

По результатам вычислений строим эпюру M_K

3. Определяем диаметр вала из условия прочности

$$\tau_{max} \le [\,\tau\,], \quad \text{или} \quad \frac{M_{K\,max}}{W_P} \le [\,\tau\,],$$

где $W_P = \dfrac{\pi d^3}{16}$ - полярный момент сопротивления площади поперечного сечения, $M_{K\max}$ - наибольший по величине крутящий момент, возникает на участке AB: $M_{K\max}$ = M_K^{AB} = 0,957 кН·м. После подстановки получим

$d \ge \sqrt[3]{\dfrac{16 M_K^{AB}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\dfrac{16\cdot 0{,}957\cdot 10^3}{3{,}14\cdot 80\cdot 10^6}} = 0{,}046$ м = 46 мм. Принимаем d = 50 мм.

Вычисляем крутильную жесткость вала $GI_P = G\dfrac{\pi d^4}{32}$, где для стали $G = 8\cdot 10^4$ МПа.

$$GI_P = 8\cdot 10^4\cdot 10^6\ \frac{3{,}14\cdot (0{,}05)^4}{32} = 49{,}0625\cdot 10^3 \text{ Н·м}^2.$$

4. Определяем углы закручивания граничных сечений A, B, C, D, K и по результатам строим эпюру φ (рис. 10в).

Угол закручивания сечения K равен нулю по условию задачи $\varphi_K = 0$.

Сечение D $\quad \varphi_D = \varphi_K + \dfrac{M_K^{DK} a}{GI_P} = 0 + \dfrac{-0{,}943\cdot 10^3\cdot 1{,}6}{49{,}0625\cdot 10^3} = -0{,}0307$ рад.

Сечение C $\quad \varphi_C = \varphi_D + \dfrac{M_K^{CD} c}{GI_P} = -0{,}0307 + \dfrac{0{,}957\cdot 10^3\cdot 1{,}9}{49{,}0625\cdot 10^3} = 0{,}006$ рад.

Сечение B $\varphi_B = \varphi_C + \dfrac{M_K^{BC} b}{GI_P} = 0{,}006 - \dfrac{0{,}843 \cdot 10^3 \cdot 1{,}8}{49{,}0625 \cdot 10^3} = -0{,}025$ рад.

Сечение A $\varphi_A = \varphi_B + \dfrac{M_K^{AB} a}{GI_P} = -0{,}025 + \dfrac{0{,}757 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6}{49{,}0625 \cdot 10^3} = 0$.

Равенство нулю угла закручивания сечения A, подтверждает правильность выполненных расчетов, так как это сечение находится в заделке и $\varphi_A = 0$.

5. Находим наибольший относительный угол закручивания:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{K\max}}{GI_P} = \frac{0{,}957 \cdot 10^3}{49{,}0625 \cdot 10^3} = 0{,}0195 \text{ рад / м.}$$

Задача 5а

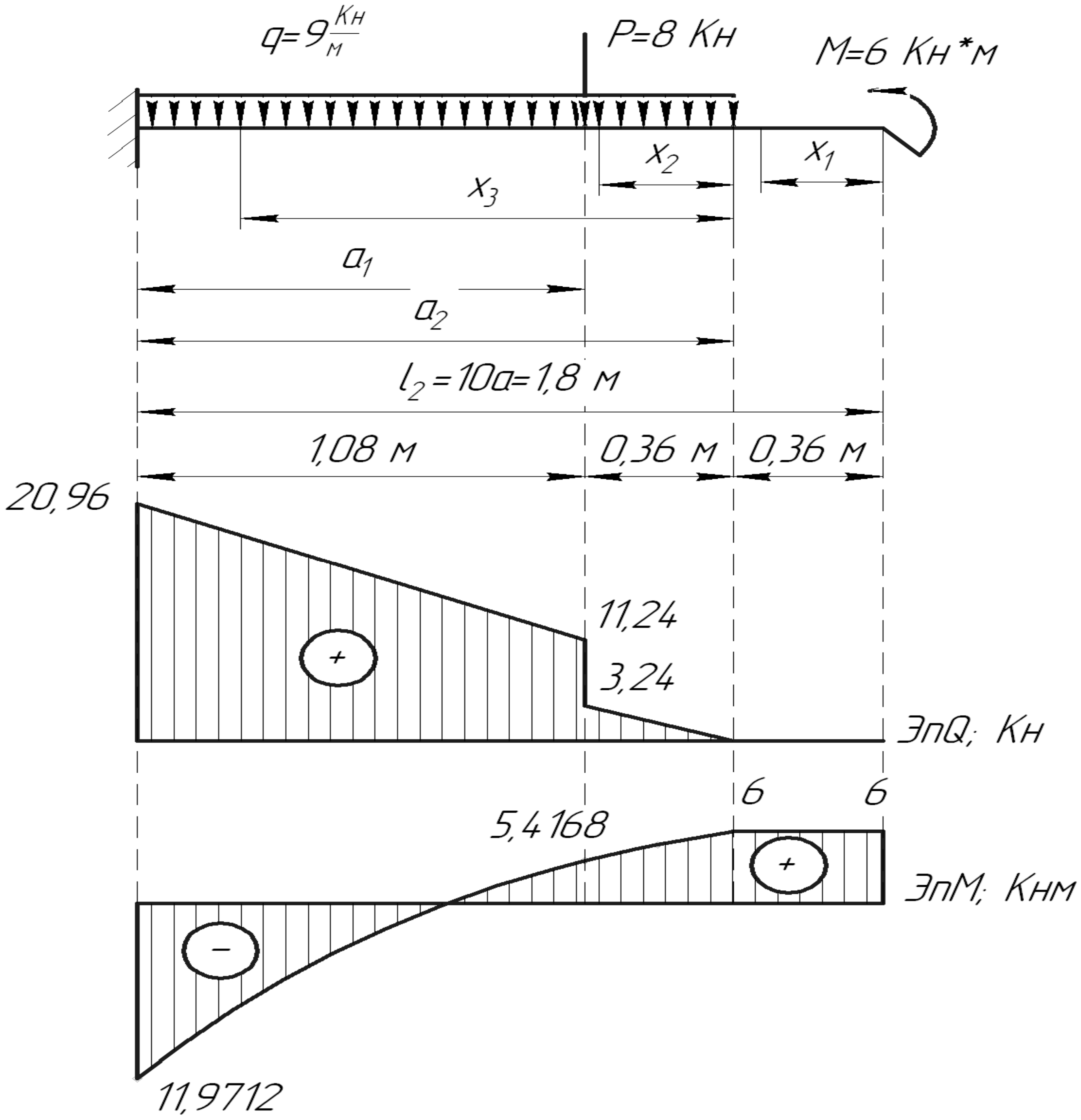
Для заданной балки требуется:

1. Записать аналитические выражения для поперечных сил *Q(x)* и изгибающих моментов *M(x)* на каждом участке.

2. Построить эпюры поперечных сил *Q* и изгибающих моментов *M*, найти M_{max}.

3. Подобрать деревянную балку круглого поперечного сечения из условия про-чности по нормальным напряжениям при $[\sigma] = 8$ МПа.

Дано: $l_1 = 10a = 1{,}8$м, $a_1 = 6a = 1{,}08$м, $a_2 = 8a = 1{,}44$м, $M = 6$ кНм, $P = 8$ кН, $q = 9$ кН/м.



Решение

1. Балка имеет три участка нагружения, для каждого из которых запишем аналитические выражения для поперечных сил $Q(x)$ и изгибающих моментов $M(x)$. Расчет будем вести по нагрузкам, расположенным со стороны свободного конца балки, что позволяет обойтись без определения опорных реакций.

I участок $\quad 0 \le x_1 \le 0{,}36$м

$Q(x_1)=0= const.$

Поперечная сила на участке постоянна, поэтому эпюра изображается прямой, параллельной оси абсцисс и отсекающей от оси ординат отрезок, представляющий в масштабе силу $Q = 0$ кН.

$M(x_1) = M = 6$ Кнм

Изгибающий момент на участке постоянен, поэтому эпюра изображается прямой, параллельной оси абсцисс и отсекающей от оси ординат отрезок, представляющий в масштабе момент $M = 6$ кНм.

II участок $\quad 0 \le x_2 \le 0{,}36$м

$Q(x_2)= qx_2 = 9\, x_2$.

Сила меняется по линейному закону, на границах участка её значения равны:

при $x_2 = 0$, $Q(x_2) =0$ кН, при $x_2 = 0{,}36$ м, $Q(x_2) = 3{,}24$ кН.

$M(x_2) = M - ½ \cdot q(x_2)^2 = 6 - 4{,}5\, (x_2)^2$.

Получили уравнение квадратной параболы. Эпюра $M(x_2)$ изображается кривой, выпуклость которой направлена вверх, навстречу распределенной нагрузке q. На границах участка имеем: при $x_2 = 0$, $M(x_2) = 6$ кНм, при $x_2 = 0{,}36$ м, $M(x_2) = 5{,}4168$ кНм.

III участок $\quad 0{,}36 \le x_3 \le 1{,}44$м

$Q(x_3)= P + qx_3 = 8 + 9\, x_3$.

при $x_3 = 0{,}36$ м, $Q(x_3) = 11{,}24$ кН, при $x_3 = 1{,}44$ м, $Q(x_3) = 20{,}96$ кН.

Эпюра изображается наклонной прямой и так как $q > 0$, то сила Q возрастает.

$M(x_3) = M\text{-}P\, x_3 - ½ \cdot q(x_3)^2 = 6\text{-}\ 8\, x_3\, 8 - 4{,}5(x_3)^2$

при $x_3 = 0{,}36$ м, $M(x_3) = 5{,}4168$ кНм, при $x_3 = 1{,}44$ м, $M(x_3) = -11{,}9712$ кНм.

Эпюра $M(x_3)$ изображается параболической кривой, не имеющей экстремума в пределах участка, и выпуклость которой обращена вверх.

2. Из построенной эпюры M видно, что опасным будет сечение на втором участке ($x_2 = 1{,}44$ м), в котором изгибающий момент достигает значения $M_{max} =11{,}9712$ кНм.

3. Подбираем деревянную балку круглого поперечного сечения из условия про-чности по нормальным напряжениям: $\sigma_{max} \le [\sigma]$, где

$\sigma_{max} = \dfrac{M_{max}}{W}$ и для круглого поперечного сечения $W = \dfrac{\pi d^3}{32}$.

Подставляя эти выражения в условие прочности получим $\dfrac{32M_{max}}{\pi d^3} \le [\sigma]$, откуда

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 11{,}9712 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^6}} = 0{,}248\,\text{м}, \quad \text{принимаем } d = 25 \text{ см.}$$

Задача 5б

Для заданной балки требуется:

1. Записать аналитические выражения для поперечных сил *Q(x)* и изгибающих моментов *M(x)* на каждом участке.

2. Построить эпюры поперечных сил *Q* и изгибающих моментов *M*, найти M_{max}.

3. Подобрать стальную балку двутаврового поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям при $[\sigma] = 160$ МПа.

Дано: $l_2 = 10a = 9$ м, $a_2 = 8a = 7{,}2$ м, $a_3 = 4a = 3{,}6$ м, $M = 6$ кНм, $q = 9$ кН/м.

Решение

1. Прежде чем записать аналитические выражения для поперечных сил *Q(x)* и изгибающих моментов *M(x)* необходимо вначале определить опорные реакции, так как они относятся к числу внешних сил.

Покажем на расчетной схеме балки (рис. 12) реакции опор R_A и R_B, направив их вверх. Горизонтальная составляющая реакции на опоре *A* равна нулю, так как внешние активные силы перпендикулярны оси балки. Для определения реакций составим уравнения равновесия в виде суммы моментов всех сил относительно точек *A* и *B*.

$$\sum M(A) = 0, \quad -\tfrac{1}{2}q(a_2)^2 - M + R_B l_2 = 0.$$

$$R_B = \frac{0{,}5qa_2^2 + M}{l_2} = \frac{0{,}5 \cdot 9 \cdot 7{,}2^2 + 6}{9} = 26{,}59 \text{ кН}.$$

$$\sum M(B) = 0, \quad -R_A l_2 + q\, a_2\,(l_2 - \tfrac{1}{2} a_2) - M = 0.$$

$$R_A = \frac{qa_2(l_2 - 0{,}5a_2) - M}{l_2} = \frac{9 \cdot 7{,}2 \cdot (9 - 0{,}5 \cdot 7{,}2) - 6}{9} = 38{,}21 \text{ кН}.$$

Для проверки найденных значений реакций R_A и R_B составим уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum P = R_A - q\, a_2 + R_B = 38{,}21 - 9 \cdot 7{,}2 + 26{,}59 - 10 = 0.$$

Следовательно, опорные реакции определены правильно.

Разобьем балку на три участка и для каждого запишем аналитические выражения для поперечных сил *Q(x)* и изгибающих моментов *M(x)*.

I участок $\quad 0 \le x_1 \le 3{,}6$м

$Q(x_1) = 0$ *Кн.=const*

Поперечная сила не изменяется.

$M(x_1) = -M = -6$ *Кнм=const.*

Изгибающий момент не изменяется

II участок $\quad 0 \le x_2 \le 1{,}8$м

$Q(x_2) = -R_B = -26{,}59$ Кн.

Поперечная сила не изменяется

$M(x_2) = R_B x_2 - M = 26{,}59\, x_2 - 6 = 20\, x_2 - 2{,}5\,(x_2)^2 + 20,$

при $x_2 = 0$м, $M(x_2) = -6$ кНм,

при x_2 = 1,8м, $M(x_2)$ = 26,59·1,8 – 6 = 41,86 кНм.

Изгибающий момент меняется по линейному закону, а эпюра $M(x_3)$ изображается наклонной прямой.

III участок $0 \le x_3 \le 7{,}2$ м

$Q(x_3) = R_A - q\,x_3 = 38{,}21 - 9\,x_3$.

Поперечная сила меняется по линейному закону, принимая на границах участка следующие значения: при $x_3 = 0$, $Q(x_3)$ = 38,21 кН, при x_3 = 7,2 м, $Q(x_3)$ = – 26,59 кН.

$M(x_3) = R_A\,x_3 - ½\,q(x_1)^2 = 38{,}21\,x_3 - 0{,}5\cdot 9(x_3)^2 = 38{,}21\,x_3 - 4{,}5\,(x_3)^2$,

при $x_3 = 0$, $M(x_3) = 0$, при x_3 = 7,2 м, $M(x_3) = 38{,}21\cdot 7{,}2 - 4{,}5\cdot 7{,}2^2 = 41{,}86$ кНм.

Так как поперечная сила на участке меняет знак, необходимо функцию $M(x_3)$ исследовать на экстремум: $\dfrac{dM(x_3)}{dx_3} = R_A - q\cdot x_3 = 0$, откуда $x_3 = \dfrac{R_A}{q} = \dfrac{38{,}21}{9} = 4{,}25$ м.

При x_3 = 4,25 м, $M_{max} = 38{,}21\cdot 4{,}25 - 4{,}5\cdot 4{,}25^2 = 81{,}11$ кНм

2. Подбираем стальную балку двутаврового поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям:

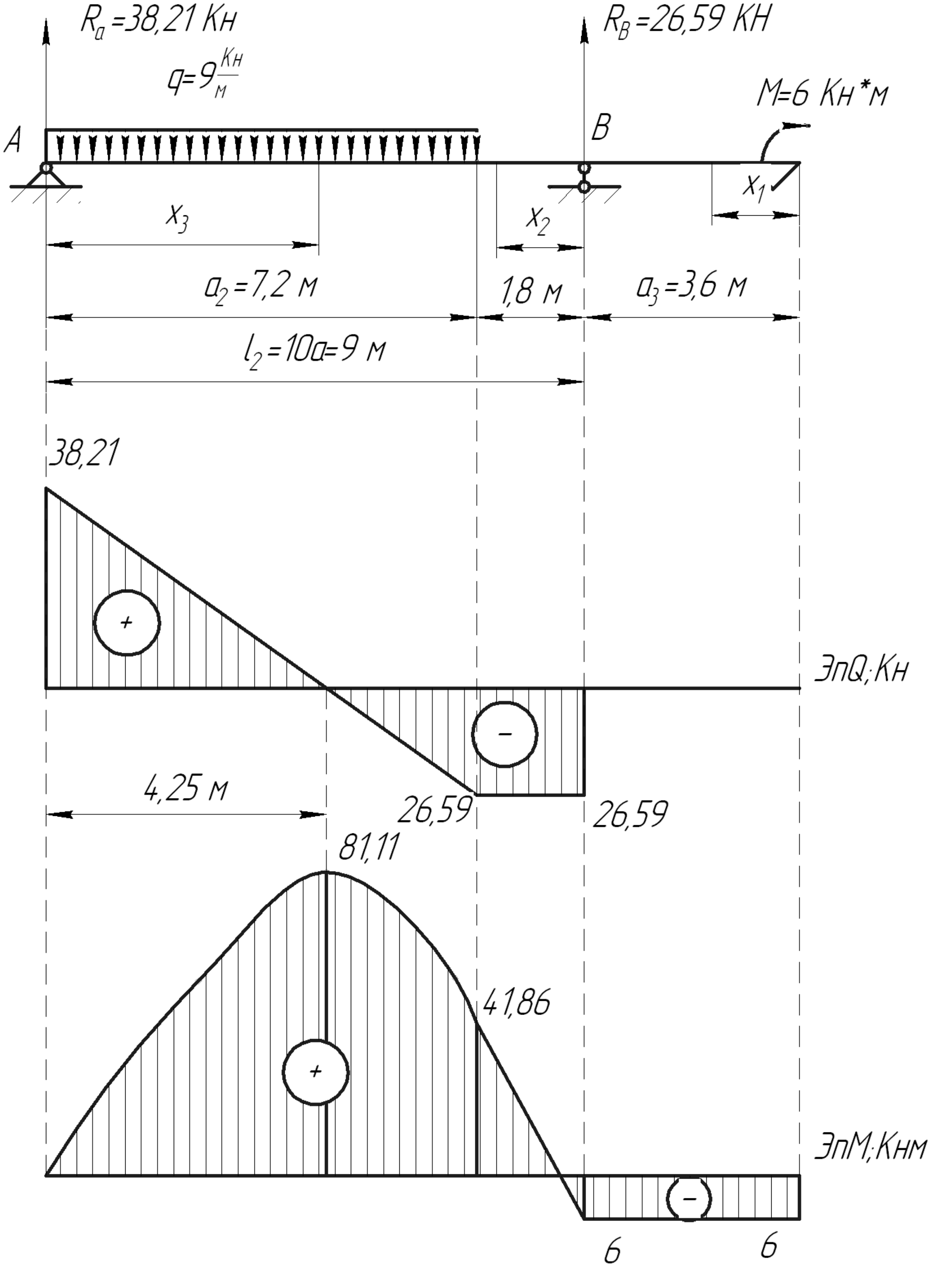
$$\sigma_{max} \le [\sigma],$$

где $\sigma_{max} = \dfrac{M_{max}}{W}$ и $[\sigma]$ = 160 МПа.

По эпюре изгибающего момента находим M_{max} = 81,11 кНм , тогда

$$W \ge \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{81{,}11\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 506{,}9\cdot 10^{-6}\text{ м}^3 = 506{,}9\text{ см}^3.$$

Из сортамента ГОСТ 8239-89 находим ближайшее значение W_x = 597 см^3 , что соответствует двутавру №33.



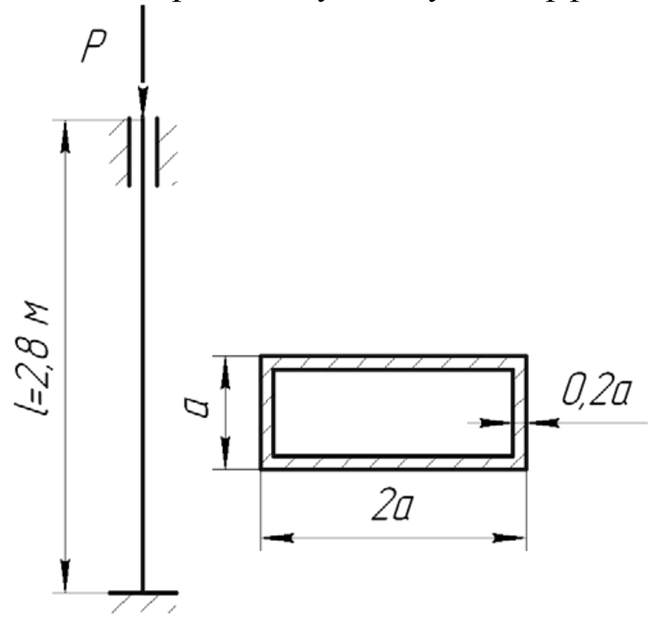
$R_a = 38,21$ Кн
$R_B = 26,59$ КН
$q = 9 \frac{Кн}{м}$
$M = 6$ Кн*м
A
B
x_3
x_2
x_1
$a_2 = 7,2$ м
1,8 м
$a_3 = 3,6$ м
$l_2 = 10a = 9$ м
38,21
+
ЭпQ;Кн
−
4,25 м
26,59
26,59
81,11
41,86
+
ЭпМ;Кнм
−
6
6

Задача 6

Стальной стержень (E = 2·10^5 МПа) сжимается силой P . Требуется:

1. Найти размеры поперечного сечения при допускаемом напряжении на простое сжатие [σ] = 160 МПа. Расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись величиной коэффициента φ = 0,5.

2. Найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.



Решение

1. Находим геометрические характеристики поперечного сечения стержня. Площадь сечения $F = 2a^2\text{-}1{,}6a{*}0{,}6a{=}1{,}04a^2$.

Минимальный осевой момент инерции $I_{min} = \dfrac{2a\cdot a^3}{12} - \dfrac{1{,}6a\cdot(0{,}6a)^3}{12} = 0{,}138a^4$.

Минимальный радиус инерции

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{0{,}138a^4}{1{,}04a^2}} = 0{,}364a\,.$$

Гибкость стержня $\lambda = \dfrac{\mu\cdot l}{i_{\min}} = \dfrac{0{,}5\cdot 2{,}8}{0{,}364a} = \dfrac{3{,}846}{a}$.

Здесь μ – коэффициент приведения длины, для рассматриваемого способа крепления стержня μ =0,5.

2. Размеры поперечного сечения стержня находим из расчетного уравнения

$$\frac{P}{F} \le \varphi\left[\sigma\right] \text{ или } \frac{P}{1{,}04a^2} \le \varphi[\sigma]\text{, откуда } a \ge \sqrt{\frac{P}{1{,}04\varphi\left[\sigma\right]}} = \sqrt{\frac{600\cdot 10^3}{1{,}04\cdot\varphi\cdot 160\cdot 10^6}} = \frac{0{,}060048}{\sqrt{\varphi}}\,.$$

Задачу решаем методом последовательных приближений. Предварительно задаемся величиной коэффициента φ_I = 0,5, тогда

$$a = \frac{0{,}060048}{\sqrt{\varphi}} = \frac{0{,}060048}{\sqrt{0{,}5}} = 0{,}0849\,\text{м}, \quad \lambda = \frac{3{,}846}{a} = \frac{3{,}846}{0{,}0849} = 45{,}3\,.$$

Определяем коэффициент снижения допускаемых напряжений. для стали Ст3 приводятся данные: при λ = 40, φ = 0,92; при λ = 50, φ = 0,89. Для стержня с гибкостью λ = 45,3 коэффициент φ лежит в пределах 0,89 ≤ φ ≤ 0,92. Интерполяцией получаем

$$\varphi_{45,3} = \varphi_{40} - \frac{\varphi_{40} - \varphi_{50}}{10} 5{,}3 = 0{,}92 - \frac{0{,}92 - 0{,}89}{10} 5{,}3 = 0{,}904 .$$

Во втором приближении принимаем φ_2 = ½ (0,5 + 0,904) ≅ 0,702 тогда

$$a = \frac{0{,}060048}{\sqrt{0{,}702}} = 0{,}0717\,\text{м}, \quad \lambda = \frac{3{,}846}{0{,}0717} = 53{,}7 ,$$

Определяем коэффициент снижения допускаемых напряжений. для стали Ст3 приводятся данные: при λ = 50, φ = 0,89; при λ = 60, φ = 0,86. Для стержня с гибкостью λ = 53,7 коэффициент φ лежит в пределах 0,86 ≤ φ ≤ 0,89. Интерполяцией получаем

$$\varphi_{53,7} = \varphi_{50} - \frac{\varphi_{50} - \varphi_{60}}{10} 3{,}7 = 0{,}89 - \frac{0{,}89 - 0{,}86}{10} 3{,}7 = 0{,}878 .$$

В третьем приближении φ_3 = ½ (0,702 + 0,878) = 0,79

$$a = \frac{0{,}060048}{\sqrt{0{,}79}} = 0{,}06756\,\text{м}, \quad \lambda = \frac{3{,}846}{0{,}06756} = 56{,}9 ,$$

$$\varphi_{56,9} = \varphi_{50} - \frac{\varphi_{50} - \varphi_{60}}{10} 6{,}9 = 0{,}89 - \frac{0{,}89 - 0{,}86}{10} 6{,}9 = 0{,}87 .$$

В четвертом приближении φ_4 = ½ (0,79 + 0,87) = 0,83

$$a = \frac{0{,}060048}{\sqrt{0{,}83}} = 0{,}06591\,\text{м}, \quad \lambda = \frac{3{,}846}{0{,}06591} = 58{,}4 ,$$

$$\varphi_{58,4} = \varphi_{50} - \frac{\varphi_{50} - \varphi_{60}}{10} 8{,}4 = 0{,}89 - \frac{0{,}89 - 0{,}86}{10} 8{,}4 = 0{,}864 .$$

В пятом приближении φ_5 = ½ (0,83 + 0,864) = 0,847

$$a = \frac{0{,}060048}{\sqrt{0{,}847}} = 0{,}06525\,\text{м}, \quad \lambda = \frac{3{,}846}{0{,}06525} = 58{,}9 ,$$

$$\varphi_{58,9} = \varphi_{50} - \frac{\varphi_{50} - \varphi_{60}}{10} 8{,}9 = 0{,}89 - \frac{0{,}89 - 0{,}86}{10} 8{,}9 = 0{,}863 .$$

В шестом приближении φ_6 = ½ (0,847 + 0,863) = 0,855

$$a = \frac{0{,}060048}{\sqrt{0{,}855}} = 0{,}06494\,\text{м}, \quad \lambda = \frac{3{,}846}{0{,}06494} = 59{,}2 ,$$

$$\varphi_{59,2} = \varphi_{50} - \frac{\varphi_{50} - \varphi_{60}}{10} 9{,}2 = 0{,}89 - \frac{0{,}89 - 0{,}86}{10} 9{,}2 = 0{,}861 .$$

В седьмом приближении φ_7 = ½ (0,855 + 0,861) = 0,858

$$a = \frac{0{,}060048}{\sqrt{0{,}858}} = 0{,}06483\,\text{м}, \quad \lambda = \frac{3{,}846}{0{,}06483} = 59{,}3\,,$$

$$\varphi_{59,3} = \varphi_{50} - \frac{\varphi_{50} - \varphi_{60}}{10} 9{,}3 = 0{,}89 - \frac{0{,}89 - 0{,}86}{10} 9{,}3 = 0{,}860\,.$$

В восьмом приближении φ_8 = ½ (0,858 + 0,860) = 0,859

$$a = \frac{0{,}060048}{\sqrt{0{,}859}} = 0{,}06479\,\text{м}, \quad \lambda = \frac{3{,}846}{0{,}06479} = 59{,}4\,,$$

$$\varphi_{59,4} = \varphi_{50} - \frac{\varphi_{50} - \varphi_{60}}{10} 9{,}4 = 0{,}89 - \frac{0{,}89 - 0{,}86}{10} 9{,}4 = 0{,}859\,.$$

Окончательно принимаем a = 6,479 см.

3. Находим критическую силу $P_{\text{кр}}$ и коэффициент запаса устойчивости $n_{\text{у}}$.

Поскольку гибкость стержня λ = 59,4 меньше предельного значения (для малоуглеродистой стали $\lambda_{\text{пред}}$ = 100), то критическую силу определяем по формуле Ясинского: $P_{КР} = F\sigma_{КР} = F(a - b\lambda) = 1{,}04 \cdot 6{,}479^2 (310 - 1{,}14 \cdot 59{,}4) = 1057{,}7$ Кн.

где F – площадь поперечного сечения стержня, а коэффициенты a и b для малоуглеродистой стали равны a = 310 МПа, b = 1,14 МПа.

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_У = \frac{P_{КР}}{P} = \frac{1057{,}7}{600} = 1{,}76\,.$$